

数学有效教学课例研究的内涵与价值*

周建华 (中国人民大学附属中学 100080)

学生在学校的学习生活主要是在课堂上度过的。瑞士民主主义教育家裴斯泰洛齐曾言:在课堂上决定了一个民族的未来。顾泠沅先生认为,当前国内外的教育改业已聚焦于下列两个观点:教师事关重大;改革最终发生在课堂上^[1]。可见,课堂无论对学生个体的成长还是民族未来的奠基均具有非常重要的意义。那么,如何引领教师在课堂教学实践的基础上认识课堂、研究课堂,进而提高课堂教学的效率和效益呢?教学实践表明,课例研究无疑是重要的方式之一。本文结合教学案例,论述高中数学有效教学课例研究的要素和价值。

1 数学有效教学课例研究的内涵

1.1 核心概念的操作性定义

“有效教学”是指教师通过设计符合规律性的教学过程,成功引起、维持和促进学生的学习,相对有效地达到预期教学效果。其内涵包括三个维度:一是课程维度,注重课程三维目标的解析与整合,突出数学核心概念、核心思想方法教学的有效性;二是学生维度,注重数学教育教学对学生发展起到的独特的基础性作用,注重如何使学生喜欢数学教师喜欢数学、主动地学习数学;三是教学维度,注重遵循学生的认知规律进行教学设计,使学生学会学数学,在不增加学生学习时间和学习强度的前提下,研究怎样提高教与学的效率。

“课例”就是“以课为例讲规律”。“课例研究”即以课堂教学实际发生的事例为载体,以某个设定的研究问题为主题,通过对教学问题的再现、描述和研究来揭示教与学改进的过程,讲述教学行为改进背后的观念和认识。^[2]其核心价值在于帮助教师由一个课例去领悟一类课的教学规律。

1.2 课例研究的内涵

课例研究的内涵主要包括以下四个要素:

(1)背景与主题。确定主题是研究的起点,课例研究不是为了通过一节课解决“大”而“多”的问题,而是要有针对性地解决一些“小”但可能“深”

的问题。这个“小”问题,便是课例研究的主题。所谓背景,就是研究该主题的原因,包括这个主题源自何处,是如何聚焦的。

(2)情境与描述。即描述课堂上发生的与研究主题相关的情境,描述应力求言简意赅、真实,让读者有身临其境之感。

(3)问题与讨论。即描述针对课堂教学提出的问题,以及产生该课例的问题线索,并沿此线索展开讨论,将讨论的过程和结论梳理呈现出来。

(4)诠释与研究。即对课例中不同阶段的问题处理方式作出诠释,解释为什么要这样处理。对课例的“研究”主要是通过一节课的改进和研究过程,究竟获得了哪些理性认识或者初步结论,需要一些概括和提炼^[3];讲出课堂教学“有效”或“低效”背后的道理,注重把一节课的教学研究结果推广和上升到一类课,揭示学生身心发展或课堂教学的一般规律。

2 数学有效教学课例研究的价值

课例研究的价值体现在解决教学中的突出问题,促进教师的专业发展和课堂教学质量的提高。数学教学有三个要素,即数学(课程)、学生、教学。因此,课例研究价值具体体现在以下三个方面。

2.1 由课例及学科,促进教师理解数学

实践表明,教师教学中出现的种种问题往往首先是对数学的理解缺位、错位以及理解不透、不深引起的。什么是数学?学生应该学习怎样的数学?这些问题应是每位教师不断思考的问题。而典型的课例及研究无疑能促进教师对数学的理解。

课例1 要使学生看到数学的“树木”,教师应当先看见数学的“森林”。

主题与背景 当前教学实践中课堂教学效益和效率低下的重要原因之一,是教师对有关教学素材抑或是对数学的理解不到位。下面课例研究的主题是如何深入挖掘教学素材的教学价值。

* 本文系全国教育科学“十二五”规划2011年教育部重点课题“高中数学有效教学课例研究”(课题批准号:DHA110240)阶段成果。

情景与描述 如图1,等腰直角 $\triangle ABC$ 中, D 是斜边 AB 的中点,点 E 在 AC 边上,点 F 在 BC 边上,且 $\angle EDF$ 是直角. 求证:(1) $DE = DF$;
(2) $AE^2 + BF^2 = EF^2$.

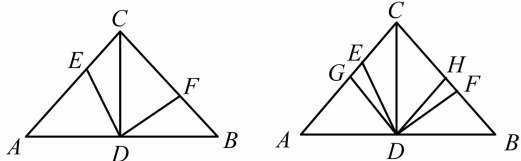


图1

图2

教师教学时先引导学生读题. 随后,教师问学生:如何证明两条线段相等? 学生回答需要证明两个三角形全等. 教师追问:证明哪两个三角形全等呢? 学生回答:图中目前没有全等的三角形,需要添加辅助线. 教师继续追问:如何添加辅助线呢? 经过思考,学生发现可以取 AC 边中点 G , BC 边中点 H ,连结 DG , DH (图2). 进而,师生一起找到了三种方法.

方法1 证明 $\triangle DGE \cong \triangle DHF$. 事实上, $\angle DGE = \angle DHF = 90^\circ$,因为 $\angle EDG + \angle EDH = 90^\circ$, $\angle FDH + \angle EDH = 90^\circ$,所以 $\angle EDG = \angle FDH$. 又 $DG = DH$,故 $\triangle DGE \cong \triangle DHF$.

方法2 证明 $\triangle EDC \cong \triangle FDB$ (过程略).

方法3 证明 $\triangle DEA \cong \triangle DFC$ (过程略).

最后,教师总结了该题的基本方法:要证明两条线段相等,一般是证明两个三角形全等;当图中没有全等三角形时,要通过添加辅助线构造两个全等的三角形.

问题与讨论 这样的教学处理,应该说做得中规中矩,问题是本题非常丰富的价值未得到挖掘和体现. 如何挖掘学习素材的教学价值呢?

其一,是对学科本质的思考.

上述三种证法,关键是什么? 体现了什么数学核心思想?

实际上,本题的背景是旋转. 用旋转的思想来表述本题即为:把一个直角绕等腰直角三角形斜边的中点自由地旋转,其两边所截在等腰直角三角形内的两条线段之长相等. 这是旋转中的不变数量关系,是旋转中不会改变的几何事实.

进一步思考,还可以发现其他的不变性. 即将一个直角绕等腰直角三角形斜边的中点自由地旋转,其两直角边所截在等腰直角三角形内的图形的面积不变. 这便是本题第(2)题的本质.

更进一步地,这种不变性还可以用正方形来

表述. 将一个正方形的一个顶点绕另一个正方形的中心旋转,该正方形两边被另一正方形所截在形内的两线段相等;该正方形被另一正方形所截的图形的面积不变(图3).

其二,是反思与构建.

如图1,在本题中 D 是斜边 AB 的中点. 这里,“中点”是点 D 的本质特征吗? 用旋转的观点来反思,便可发现“中点”并非是本质特征, D 是 $\angle ACB$ 的角平分线与对边 AB 交点,这才是其本质特征;同时, $\angle ACB$ 与 $\angle EDF$ 均为直角亦非本质特征,而此两角互补方为其本质特征. 在此基础上,我们便可对该题构建和推广. 即:将三角形一个角的补角绕该角平分线与该角对边的交点旋转,其两边所截在该三角形内的两条线段之长相等(图4).

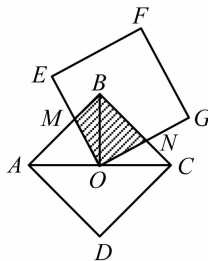


图3

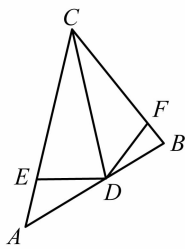


图4

诠释与研究 通过本课例的研讨,教师应思考什么是几何. 几何是研究空间结构及性质的一门科学. 如何用旋转诠释欧氏几何呢? 欧氏几何研究的是在刚体运动下不变的性质.

这样的研究给我们的启示是,人们经常说“要教给学生一滴水,教师必须有一桶水”,现在看来一桶水是远远不够的,教师要有一潭水. 也就是说,教师自身必须对数学有足够深刻的理解.

理解数学是提高课堂教学有效性的前提. 理解数学主要包括五个方面:(1)理解是什么,即“知其然”,了解数学知识的背景及逻辑意义.(2)理解为什么,即“知其所以然”,理解该知识的发生与发展,该知识在教材中的地位、前后的联系、后续学习的必要性.(3)寻求多元表征,即建立多元表征. 这是因为基于学生的多元智能,应为学生构建多元认知途径.(4)建构内容联系,即建构知识之间的多元联系.(5)挖掘思想方法,即深刻领悟内容所反映的思想方法. 综上,要使学生看到数学的“树木”,教师应当先看见数学的“森林”.

2.2 由课例及学生,促进教师理解学生

从数学教学的出发点看,数学教学应当基于

数学内容以及学生的基本学习情况和学习需求. 从数学教学的目标看, 数学教学要促进学生的发展, 真正实现“数学育人”. 简单地讲, 数学教学的出发点是学生, 归宿也是学生. 因此, 理解学生, 特别是理解学生的认知特点和规律便是教师非常重要的专业能力.

课例 2 如何理解学生的数学学习?

主题与背景 这是学习三角时常见的一个问题: 已知 θ 是第二象限的角, 则 $\frac{\theta}{2}$ 是第几象限的角? 笔者经历了这道例题的三轮不同教法, 进而由此加深了对学生是如何进行数学学习的理解.

情景与描述 第一轮教法, 逻辑推演. 由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2}$, 再对 k 按奇

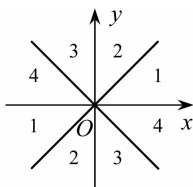


图 5

数、偶数进行讨论. 第二轮教法, 教给“秘笈”. 即逻辑推演后, 教给学生图 5(即在图中找出数字“2”对应的象限即可, 其余类推). 第三轮教法, 自主探究. 学生一般是从逻辑推演开始, 得出结论. 在此基础上, 教师引导学生提出问题, 如果 θ 所在象限变为第一、三、四象限, 结论如何呢? 引导学生自己得出图 5 的结论. 在此基础上, 学生会再探究: 研究 $\frac{\theta}{3}, \frac{\theta}{4}$ 所在象限, 并得出相应的图.

问题与讨论 教学实践表明, 第一轮教法存在两个问题, 一是学生不易掌握这种讨论的方法, 二是在做此类选择题、填空题时显得“小题大作”. 为什么会这样? 主要原因是学生缺少这方面的过程经历和活动经验. 第二轮教法存在的问题是, 如果出现的是选择题、填空题, 学生正答率较高, 但如果是解答题, 能正确表述过程者很少. 为什么? 原因在于学生掌握讨论这样的技能必须有一定的有效训练和体验. 这里, “秘笈”遮蔽下的教师“潜意识”, 是指向“得分”、指向“应试”的.

诠释与研究 教师为什么要理解学生? 教师的教学是为学生学习与发展的服务的. 理解是人类存在的基本事件^[4], 而理解的基本含义是: 意义沟通, 相互解释, 设身处境, 共同体验, 宽容悦纳^[5]. 教学实践表明, 越是缺乏教学经验的教师, 越会将教学中的困难、教学效果的低下归因于学生. 而专家教师则会将上述问题归因于教师自身. 进一步

地, 前者在课堂教学中往往照本宣科, 以控制者和支配者的姿态出现, 而后者则会更多地引导学生自由探究和讨论, 以平等和开放的态度出现. 本案例告诉我们, 学生的数学学习结果不是由教师“塞”进大脑的, 更不是由教师所谓的“秘笈”而“点石成金”的. 教师应该去激发学生的学习兴趣, 调用学生已有的社会活动(生活)经验和数学活动经验, 让学生在此基础上形成高峰体验, 将经历的典型的学习过程和方法内化为新的数学活动经验和能力, 促进学生良好认知结构的形成. 教师理解学生的意义在于: 这是促进教师尊重学生、教师教学理念先进性的重要标志; 能促进教师教学行为的针对性和有效性; 能促进教师换位思考, 积极寻找学生认识的合理性, 悦纳学生的行为和认识; 能促进教师解放学生, 给予学生发展的时间和空间.

教师要理解学生什么呢? 主要包括理解学生的身心发展规律, 理解学生的数学学习过程以及学生是如何进行数学问题解决的, 要善于理解学生的学习错误以及“错误中的合理成分”, 还要善于理解“学生是如何理解教师”的.

2.3 由课例及教学, 促进教师理解数学教学

教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程. 数学教学应当是教师引领学生走向数学、学习数学、应用数学, 而不是将数学知识“塞”给学生. 因此, 通过课堂教学实践与研究帮助教师认识和理解数学教学的价值追求、基本特点及规律, 促进学生有效地学习和发展的, 是尤为重要的.

课例 3 如何促进学生有效地学习?

主题与背景 本课授课班级是初一某数学基础较好的班, 课题为“正三角形面积的四等分”. 本课例研究的主题是数学教学如何理解和顺应学生的学习需求. 课前, 教师已经要求学生进行了独立研究, 课上主要进行展示与分享.

情境与描述 本课授课教师的教学设计与教学实施大致如下.

- 环节 1 教师边讲边与学生讨论: 如何将正三角形分为面积相等的两个三角形、三个三角形?
- 环节 2 学生分三个小组展示研究成果.
- 环节 3 学生活动: 如何将得到的结果进行分类?
- 环节 4 师生互动, 分类不重不漏.
- 环节 5 学生从得出的结果中选取 2~3 种, 证明所得图形中的四个三角形的面积是相等的.

环节6 师生互动,课堂总结交流.

问题与讨论 本节课最大的特点是教师的教学理念较为先进,在教师的引导下,所有的学生都积极参与了课堂学习活动,教学效果较好.值得研究的问题是:

问题1 课堂教学一开始,最重要的是什么?

本课中,教学一开始,教师采用先行组织者策略,其目的是为下面解决问题做好铺垫,是指向问题解决的.课堂教学伊始,最重要的是什么?是让学生尽快进入本课的问题,在迫切的要求下学习.试想一下,教师课前布置学生研究了,那么一上课学生最想做的事情是什么?向大家报告自己的研究成果!那么,学生的实际心理是怎样的呢?为此,我对学生进行了问卷调查.

上课一开始,我最想做的事是:A.听老师讲课;B.向大家介绍我和我们组的研究成果.

问卷结果为,选A的17人,选B的30人.选A的学生中,有10人是因为想要听教师讲课,收获知识;有2人是因为要查缺补漏,解开疑惑;也有2人是因为觉得课题有吸引力,并且课下已经讨论完,急于与教师对一下答案.选B的学生中,有19人是因为在课下已精心准备,迫不及待想向大家汇报自己的成果;有5人觉得在共同研究过程中得到了探索的乐趣,并且讨论让问题解答更全面;有4人想与大家讨论看看自己是否已经找全.

有了这样的认识,教师一上课就可以让学生汇报交流自己的研究成果.这样的设计无疑顺应了更多学生的心理状态.但是教师上课一开始那一段方法的指导确实很重要,这个矛盾怎么解决?稍后对此予以讨论.

问题2 比结果更重要的是什么?

在环节2中教师让三组学生上黑板展示研究成果,并让他们分别汇报、交流和讨论.这里,教师采用“独立探究+合作交流”的策略,过程比较流畅,特别是对所得图形分类的处理,学生的展示交流,以及教师的引导都非常到位.

在学生展示了自己小组的结果后,教师对第一组学生说:“给大家讲一讲,你们为什么这么分类呢?”第一组3位学生依次回答后,第4位学生在教师的要求下对分类的标准进行了总结.但是我们仔细思考一下,这个过程指向什么?是结果!然而,研究问题思路形成的过程无疑比结果更重

要.当然,教师也可能是想通过对结果进行分类寻找解决本问题的策略,但遗憾的是课堂教学中并未充分体现这一点.

问题3 注重过程的教学如何设计?

课堂教学不妨这样设计,环节1变为让学生展示自己的研究成果,学生展示完后,教师将学生的注意力引导到研究问题思路的形成过程.模拟如下.

师:刚拿到这个问题,你是怎样想的?怎样得到这个结果的?

生:……

(学生可能说不出,也可能说:“我也不知道,我就想出来了.”因此,人们常常将思维活动比作“黑箱”.这里其实有一个方法论的问题.)

这时,教师可以通过追问,帮助学生把想法逐步清晰地表述出来.

师:你仔细回忆一下,你得到的第一个图形是什么?

学生面临一个有挑战性的新问题,就好像蚂蚁想吃一个美味的苹果,它只有设法咬开第一口,打开一个洞,才能吃到里面的果肉.因而,学生在什么地方“咬开第一口”非常值得研究.

那么,这里学生咬下的第一口有哪些可能情况呢?图6中5种情况都有可能.学生从哪个图形突破的可能性大一些呢?凭经验分析应该是A.问卷调查结果表明,选A的有38人(原因:最简单);选B的有4人(原因:先进行二等分再二等分比较好想);无人选C或选D;选其他图形共3种7人次.明确了这些,下面的教学如何设计与实施呢?我们以选A为例,模拟如下.

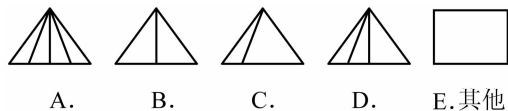


图6

师:你是怎么想到这个图的?

(学生的回答可能是多样的,有的能清楚地表达自己的思想,有的则比较模糊,我们以后者为例.)

生:我也不知道,我一下子就想到了这个图形.

师:很好!你所说的“一下子”在思维方法上是一种直觉思维,它在一定的因素触发下才会发生.那么,你觉得这个图形是很简单呢?还是很美呢?或者是因为以前的某些知识或经验?

(从问卷结果来看,学生是从最简单入手的.)

下面一段非常有价值的教学就开始了.

师:谁能把他的想法说得更清楚一些?也就是说,这里最简单的意思到底是什么呢?

这时,就容易引导学生说出三角形的中线将三角形面积两等分这样的知识和经验.

师:怎么由二等分的问题一下子就跳到了四等分?(引出研究三等分的问题)

对三等分问题,该教师处理得非常好(图7).

处理好学生想到的第二个图形也很重要.当学生想到的第一个图形如图8时,第二个图形至少有以下3种可能(图9).

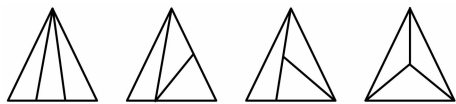


图7

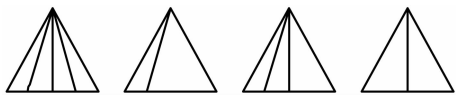


图8

图9

师:下面,我们将原来的问题转化为什么问题了?(将剩余的图形分成面积相等的两个三角形或三个三角形的问题)

进一步地,教师在此基础上应对学生进行方法论的引导.

师:这一段讨论使我们对自已的思维活动有了一个重要的认识:解决未知的问题,总是要用到已有的知识和方法.我们已有的知识和方法很多,到底用什么呢?——和目前问题联系最密切、最简单的知识和方法.这里,当然是将三角形分为面积相等的两个三角形的方法.

师:在数学上,像这样把不熟悉的、未解决的问题转化成熟悉的、已经解决的问题的方法叫化归.为了便于同学们理解这种方法,给大家打一个比方:一位数学家和一位物理学家各要烧一满壶开水.(1)给你一个煤气灶,一个水龙头,一个空水壶,你们怎么做?对此情境,数学家、物理学家的做法都是将水壶放满水,放到煤气灶上烧开.(2)给你一个煤气灶,一个水龙头,一个装了半壶水的水壶,你们怎么做?物理学家的做法是将水壶放到水龙头下灌满水,再放到煤气灶上烧.而物理学家的做法是“把水倒掉”,他还说了一句意味深长的话:我已将这个问题转化成刚才的问题了!——当然,生活中的数学家不会这样傻!

问题4 学生展示后交流如何再设计得开放一些?

师:第一小组研究结果展示好了,现在让你向他们提问,你最想问的问题是什么?

教师应善于对学生提出的种种问题进行重要性的梳理、逻辑性的梳理、结构性的梳理.

诠释与研究 (1)数学教学应顺应学生的学习心理.研究表明,在学习过程中,激发学生的学习动机、学习兴趣和价值追求,营造宽松、和谐、自由及平等的课堂文化,是促进认知发展的支柱和动力.

(2)数学教学是思维活动的教学.数学思想方法教学的三条标准:1)思维方法应是非常自然的;2)学生能学到手的;3)今后能用得上的.进行数学思想方法教学的主要举措是:深钻教材,追踪数学家的思路;模拟发现,稚化教师的思路;放手探索,激活学生的思路.

(3)数学教学可以通过设计结构化的“问题串”来组织好课堂教学的层次和结构.研究表明,教师根据教学内容的特点和不同学生的发展水平,通过“问题串”来提高所呈现的知识和经验的结构化程度、组织好从简单到复杂的有序累积过程,是提高转化效率的基础.

(4)教学设计的核心是设计学生的学习活动.研究表明,离开学习活动,既不能表现学生的能力也不能发展学生的能力.因此,精心设计和组织各类发挥学生自主性的行为活动与认知活动,是促成行为结构与心理结构迅速互化的有效途径.

综上,数学课例研究通过一节课揭示一类课的教学规律,促进教师理解数学、理解学生及理解教学.

参考文献

- [1] 顾泠沅,王洁. 教师在教育行动中成长——以课例为载体的教师教育模式研究(下)[J]. 课程·教材·教法,2003(2):14-19.
- [2] 杨玉东. 课例研究的关键是聚焦课堂[J]. 人民教育,2013(7):44-47.
- [3] 杨玉东. 教师如何做课例研究[J]. 教育发展研究,2008(8):72-75.
- [4] 张能为. 理解的实践——伽达默尔实践哲学研究[M]. 北京:人民教育出版社,2002.
- [5] 周小山,雷开泉,严先元. 新课程视野中的数学教育[M]. 成都:四川大学出版社,2003.