

基于数学学科核心素养的语言转译能力调查研究*

朱永厂 (江苏省无锡市辅仁高级中学 214123)

钱 铭 (江苏省无锡市第一中学 214031)

摘要 对数学语言的识别、理解、转译和表达能够促进对数学本质的理解和数学核心素养的培养. 当前高中生的数学语言转译能力相对欠缺且存在较大差异, 值得广大数学教育工作者高度关注. 通过对测试问题的选择与编制、对测试结果的现状分析以及对问题解决的对策研究, 探索出提高数学语言转译能力的几种有效途径, 从而实现培养数学学科核心素养的教学目标.

关键词 核心素养; 数学语言; 转译能力; 调查研究

文章编号: 1004-1176(2022)12-0033-05

数学教育家斯托利亚尔曾指出:“数学教学也就是数学语言的教学.”^[1] 数学语言既是数学知识的重要组成部分, 又是数学知识的载体, 学习数学的目的就在于帮助学生运用数学的语言与自然进行更精确的对话. 数学语言可分为文字语言、符号语言、图形语言三类. 在高中数学教学过程中不难发现, 学生对文字语言、符号语言和图形语言的理解和转译能力存在着较大差异和诸多不足, 而这种差异恰恰体现了部分学生对数学本质理解的肤浅和数学核心素养水平的薄弱, 这种不足更是反映了学生在情境与问题、知识与技能、思维与表达以及交流与反思等方面的欠缺, 同时也反映了学生从数学的角度发现和提出问题、分析和解决问题能力^[2] 较弱. 基于此, 笔者认为在数学教学过程中注重数学语言转译能力的培养和均衡发展显得尤为重要.

1 测试问题的选择与编制

1.1 问题编制

为了调查高中生数学语言转译能力的现有水平和了解各种语言转译能力的差异, 笔者经过精心设计编制出 6 道从不同方向测试语言转译能力的问题, 并对江苏某重点高中高二和高三年级 6 个班(高二和高三各 1 个理科实验班、一个理科平行班和一个文科平行班, 每班均为 45 人) 270 名学生做了关于数学语言转译能力水平及其差异的测试, 旨在比较差异、寻找原因和研究策略.

问题 1 某饭店为了回馈顾客, 推出如下活动: 3 个空汽水瓶可以换一瓶汽水. 现有 16 个空汽水瓶, 若不再交钱, 最多可以喝 _____ 瓶汽水, 并谈谈你

对问题的理解.

问题 2 某高校组织学生对所在区域的居民中拥有电视机、汽车、电脑等情况进行一次抽样调查. 调查结果显示: 有电视机的 1 180 户, 有汽车的 767 户, 有电脑的 850 户; 电视机、电脑都有的 598 户, 电脑、汽车都有的 452 户, 电视机、汽车都有的 520 户; “三件”都有的 285 户. 问: 被调查的居民总户数为多少?

问题 3 请将图 1 用文字语言准确地告知你的同学, 并写在后面的横线上: _____.

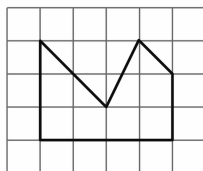


图 1

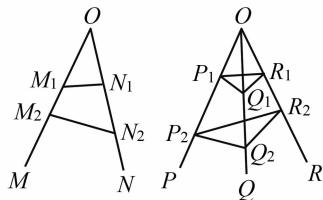


图 2

问题 4 如图 2, 若从点 O 所作的两条射线 OM, ON 上, 分别取点 M_1, M_2 与 N_1, N_2 , 则三角形面积之比 $\frac{S_{\triangle OM_1N_1}}{S_{\triangle OM_2N_2}} = \frac{OM_1 \cdot ON_1}{OM_2 \cdot ON_2}$. 若从点 O 所作的不在同一平面内的三条射线 OP, OQ 和 OR 上, 分别取点 P_1, P_2 , 点 Q_1, Q_2 , 点 R_1, R_2 , 请猜想类似的结论: _____.

问题 5 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 AC 的中点, 且 $BD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

问题 6 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 请构造一个关于不等式 $\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} > \sqrt{a^2 + c^2 - ac}$ 的几何模型, 并说明理由.

* 本文系无锡市教育科学“十四五”规划课题“基于数学理解的高中生学习评价实践研究”(WXSJY202200323)、江苏省教育科学“十四五”规划课题“科学之美视角下的数理跨学科项目式学习研究”(B/2021/02/26)、江苏省教育科学“十四五”规划课题“培养高阶思维、促进深度理解的高中数学教学研究”(D/2021/02/94)、江苏省教育科学“十四五”规划重点课题“基于 Pirie-Kieren 数学理解模型的高中数学教学研究”(B/2021/02/24)的研究成果.

1.2 设计意图

问题 1 和 2 是文字语言信息给予题,主要测试学生能否将文字语言的本质挖掘出来并将其转译为符号语言和图形语言,能有效地考查学生的数学抽象和逻辑推理等核心素养.问题 3 和 4 是图形语言信息给予题,主要测试学生能否将图形语言的本质表述出来并将其转译为文字语言和符号语言,问题具有一定的开放性,能够考查学生的思维与表达、交流与反思能力.问题 5 和 6 是符号语言信息给予题,主要

测试学生能否将符号语言的本质概括出来,并将其转译为文字语言和图形语言,能够很好地考查学生的数学建模和直观想象等核心素养.

2 测试结果的现状分析

调查试卷采取独立闭卷答题,测试时间相对充裕,为 35 分钟,学生答题认真,信度较高,270 份试卷全部有效.通过对试卷的认真批阅、分析和统计,制作出几份测试结果统计表.

2.1 具体问题的答题情况统计与现状分析

表 1 具体问题测试结果分布表

		高二理科 实验班	高二理科 平行班	高二文科 平行班	高三理科 实验班	高三理科 平行班	高三文科 平行班	合计
问题 1	答对人数	16	11	9	22	12	9	79
	正确率	35.56%	24.44%	20.00%	48.89%	26.67%	20.00%	29.26%
问题 2	答对人数	32	26	27	38	30	32	185
	正确率	71.11%	57.78%	60.00%	84.44%	66.67%	71.11%	68.52%
问题 3	答对人数	9	6	7	12	7	9	50
	正确率	20.00%	13.33%	15.56%	26.67%	15.56%	20.00%	18.52%
问题 4	答对人数	26	22	18	33	27	19	145
	正确率	57.78%	48.89%	40.00%	73.33%	60.00%	42.22%	53.70%
问题 5	答对人数	15	9	6	23	16	9	78
	正确率	33.33%	20.00%	13.33%	51.11%	35.56%	20.00%	28.89%
问题 6	答对人数	30	22	15	37	30	21	155
	正确率	66.67%	48.89%	33.33%	82.22%	66.67%	46.67%	57.41%

由表 1 可知,问题 1 的正确率仅为 29.26%,在这 79 人中得到正确结果 8 的大多数是用枚举法做出来的,只有 33 人能将关键信息“3 个空瓶”换“1 瓶汽水”的本质含义“2 个空瓶换 1 个瓶中的‘汽水’”挖掘出来,如果题中的数字较大,枚举的难度就会加大,正确率会更低.

问题 2 的正确率为 68.52%,有 176 人能够给出准确的过程,将文字语言转译为图形语言(Venn 图)容易求解,记 $A = \{\text{拥有电视机的居民}\}$, $B = \{\text{拥有汽车的居民}\}$, $C = \{\text{拥有电脑的居民}\}$,则 A, B, C 三个集合的元素个数分别为 1 180, 767, 850, 两两交集的元素个数分别为 598, 452, 520, 三个集合的交集元素个数为 285, 因此居民总户数为 $1\ 180 + 767 + 850 - (598 + 452 + 520) + 285 = 1\ 512$, 正确率相对较高.

问题 3 的正确率仅为 18.52%,能够清楚表述的仅 29 人,能大概得其要领的有 21 人,其余的基本上是洋洋百言却越说越模糊,倘若你未曾见过该图形的话,根本不知其所言;而表达最巧妙的 12 位学生用的是坐标法,仅用一句话就表述得非常清晰:“在长宽为 6×5 的长方形网格内,顺次联结点 $(1, 1), (5, 1), (5, 3), (4, 4), (3, 2), (1, 4), (1, 1)$ 所得的封闭的图形.”

问题 4 的正确率为 53.70%,145 人全部能将图形语言向符号语言转译,由二维平面中的比式关系,通过观察、归纳、类比和验证获得三维空间中的类似

$$\text{结论为 } \frac{V_{O-P_1Q_1R_1}}{V_{O-P_2Q_2R_2}} = \frac{OP_1 \cdot OQ_1 \cdot OR_1}{OP_2 \cdot OQ_2 \cdot OR_2}.$$

问题 5 的正确率为 28.89%,其中有 51 人能将条件概括出符号语言 $AB = 2AD$ 并转译成文字语言:到两定点 B, D 的距离之比为定值 2 的点的轨迹为阿波罗尼斯圆(除去两点).以 BD 为 x 轴、 BD 中点为坐标原点建系,易得点 A 的轨迹方程为 $(x - \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$, 这样很容易得到正确的结论为 $\frac{8}{3}$.

问题 6 的正确率为 57.41%,测试的结果令我们较为满意,其中 96 人能够给出严谨、巧妙的证明:如图 3,构造三棱锥 $O-ABC$,使得 $OA = a, OB = b, OC = c$,且 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA =$

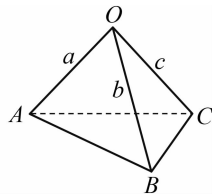


图 3

60° , 则有 $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ}$, $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ}$, $CA = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos 60^\circ}$, 由 $AB + BC > CA$, 得 $\sqrt{a^2 + b^2 - ab} +$

$$\sqrt{b^2 + c^2 - bc} > \sqrt{a^2 + c^2 - ac}.$$

由表1可知,问题1,3,5的正确率较低,即学生对文字语言向符号语言、图形语言向文字语言以及符号语言向文字语言的转译能力较低;而问题2,4,6

的正确率相对较高,即学生对文字语言向图形语言、图形语言向符号语言和符号语言向图形语言的转译能力较高.

2.2 不同班级的答题现状与差异分析

表2 各班级测试结果分布表

	高二理科 实验班	高二理科 平行班	高二文科 平行班	高三理科 实验班	高三理科 平行班	高三文科 平行班	合计
总答对人次	128	96	82	165	122	99	692
正确率	47.41%	35.56%	30.37%	61.11%	45.19%	36.67%	42.72%

由表2可知,高二、高三各层次班级正确率差异较大,高三理科实验班正确率最高,为61.11%,高二文科平行班最低,为30.37%,且理科生的正确率超过文科生,基本符合学生的认知特点和成长规律,随

着高二学生认知水平的提高和训练的深入,各种能力会赶上或超过高三年级.

2.3 不同性别的答题现状与差异分析

由表4可知,男生、女生的正确率分别为49.28%,

表3 各班男女生人数分布表

	高二理科 实验班	高二理科 平行班	高二文科 平行班	高三理科 实验班	高三理科 平行班	高三文科 平行班	合计
男生	25	26	18	26	27	16	138
女生	20	19	27	19	18	29	132

表4 男女生测试结果统计表

		问题1	问题2	问题3	问题4	问题5	问题6	合计
男生	答对人次	50	102	27	89	48	92	408
	正确率	36.23%	73.91%	19.57%	64.49%	34.78%	66.67%	49.28%
女生	答对人次	29	83	23	56	30	63	284
	正确率	21.97%	62.88%	17.42%	42.42%	22.73%	47.73%	35.86%

35.86%,男生的数学语言转译能力优于女生,仅有问题3将图形语言向文字语言转译能力上男女生水平比较接近,说明女生的文字语言表达能力更有优势,这和男生的理性思维总体较强、女生的形象思维总体较强的认知规律是相符合的^[3].

2.4 三种语言转译能力的现状与差异分析

测试结果中令我们感到惊讶的是,问题1是一道小学生都可以做的文字信息给予题,竟然难倒了这么多重点高中的优秀学生,表现出学生不善于捕捉问题的关键信息并将其本质合理转化;问题3的测试结果与我们的期望值相差很大,说明学生将图形语言转译为文字语言的能力很差,不知从何下手,说明语言表达能力还急待提高;问题5的测试结果也出乎我们的预料,说明学生将符号语言转译为文字语言的抽象概括能力较弱,而其他三种语言转译能力相对较好些,主要是当前的考试命题中多以这几种题型为主,教学中教师加强这方面的训练较多的缘故.这些都说明了当前数学教育中存在着诸多

认识不足、功利思想比较严重等问题,这些问题都影响了数学学科核心素养的培养.

3 问题解决的对策研究

数学语言与生活语言不同的是数学语言具有较强的精确性、抽象性、严谨性和概括性.数学中的定义、定理、法则和公式等是通过文字、符号或图形语言的方式呈现出来的,换句话说,数学语言的表现形式便是数学知识的呈现方式.数学问题的解决、思维的培养和核心素养的形成都是建立在对数学语言的理解、转译和表达上的.三种语言特点的差异、不同学生个体的差异以及学生对不同数学语言理解的差异,使得学生之间数学语言转译能力存在着差异性和不均衡性^[4].基于此,在数学教学中应做好如下几个方面.

(1) 逐渐渗透“说数学”训练,培养思维与表达和交流与反思能力

著名心理学家维果茨基认为:数学语言和思维有着紧密的联系.在语言表达的同时,说背景,说内

涵,说解法,说过程,通过大脑及时收集、整理相关信息,进而用语言表达出来,整个过程就是思维的理解到语言的过渡过程,通过“说数学”能够充分暴露学生对问题的理解过程,如此的学习方式加强了思维与语言之间的动态转译,有利于数学语言转译能力的培养^[5].例如,在立体几何教学中,要让学生有更多说的机会,不仅要从事图形语言到文字语言去说定理,还要从文字语言到符号语言去表述定理.

(2) 加强文字语言抽象化和形象化训练,培养信息收集能力和数据分析素养

数学中的文字语言是对问题一般性的描述,具有通俗易懂的特点,但其中有些关键信息和专业术语往往蕴涵着问题的本质,是理解问题的关键.数学中的文字语言转译能力主要体现在数学应用题上,而应用题中的文字语言信息收集能力主要表现在阅读理解能力上.要提高阅读理解能力,一要通读.从头到尾将文字语言通读一遍,读的过程中既看条件又要看结论,既看整体又要看部分,明确问题的目标;二要研读,在通读的基础上仔细搜寻、捕捉、收集题中的信息,抓住关键字句,理解本质含义;三要转译,阅读题目时将文字信息中的概念、条件、符号、数量、公式及方法等,通过联想将其转译(化归)到相关知识中去.阅读的过程中要做到边读边联想边化归^[6].例如:“在测量某物理量的过程中,因仪器和观察的误差,使得 n 次测量分别得到 a_1, a_2, \dots, a_n 共 n 个数据,规定所测量物理量的“最佳近似值” a 是这样—个量:与其他近似值比较, a 与各数据的差的平方和最小.按此规定,从 a_1, a_2, \dots, a_n 推出 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.”本题信息是由文字语言给出的,解决问题的关键是对“最佳近似值”的理解,若将其转译为符号语言,问题就转化为我们熟悉的二次函数求最值的问题:当实数 a 取何值时,函数 $f(a) = (a - a_1)^2 + (a - a_2)^2 + \dots + (a - a_n)^2$ 的取值最小?根据二次函数取得最值的条件,极易求得 $a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

文字语言转译能力的培养关键是加强文字语言抽象化和形象化训练.这是一个长期的、潜移默化的过程,应从高一就开始培养,不能等到高三再进行突击和集训,也不能认为多做几道应用题就行了,必须在平常教学过程中坚持不懈地进行培养,要抓细水长流,要抓潜移默化,通过文字语言转译能力的训练培养学生信息收集能力和数据分析的素养.

(3) 加强符号语言文字化和图形化训练,培养数学建模和直观想象素养

根据心理学的理论,人脑对信息的储存主要有语言和形象两种,但形象的容量应是语言的上百倍.所以,在某些方面,图形语言有符号语言所不能及的优越性.在数学教学中,在抓好形译数的同时,更要抓好数化形,使学生能将大量的符号语言迅速正确地转译成图形语言,借助图形直观形象的特点,进行观察、记忆、联想和分析来解决问题^[7].比如,若对于不等式 $0 \leq x^2 + px + 5 \leq 1$ 只有一个解,那么 p 的取值应该是多少?就这一问题,学生如果仅是抓住数学符号语言,就会觉得无从下手,思维就会受到限制,如果将其转译为图形语言:抛物线 $y = x^2 + px + 5$ 与图形 $0 \leq y \leq 1$ 之间的位置关系,就可以使看似无法求解的问题轻松获解.

对于将符号语言转译为图形语言,在平时的教学中我们在意得很多,训练得也相对到位,几乎所有的数形结合思想的训练都集中在它身上.所以,这种能力的训练应讲究方法,不应靠题海来取胜.在教学过程中,如果图形不能准确地作出就会误导学生.为克服这一难点,可用计算机辅助教学,通过人机对话,使学生真正游刃于数形之间,提高其数化形的积极性.

(4) 加强图形语言文字化和符号化训练,培养数学抽象和逻辑推理素养

图形语言是一种视觉语言,它具有形象性和直观性,而符号语言是一种推理语言,它具有准确性、严密性、抽象性和概括性.由于图形语言和符号语言各有其自身特点,所以在问题表述、问题解决和数学思想交流过程中,都要将图形语言转译为符号语言.在上述转译过程中,我们应根据所给图形的特点和性质,将隐含在图形深处的本质的东西挖掘出来,并将其符号化.例如,如图 4,在 $\triangle ABC$ 内有一点 O ,若 $OA = a, OB = b, OC = c$,且它们的夹角均为 120° ,试构造一个关于 a, b, c 的不等式模型.我们可以引导学生将图形语言向文字和符号语言转译:由余弦定理和 $AB + BC > CA$ 得

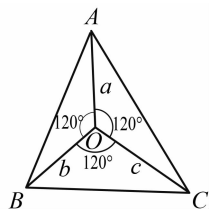


图 4

$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}, BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ} = \sqrt{b^2 + c^2 + bc}, CA = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$,于是可构造不等式模型 $\sqrt{a^2 + b^2 + ab} + \sqrt{b^2 + c^2 + bc} > \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$.

当前,高中数学教学过程中对图形语言向文字

语言转译重视不够,训练较少,学生处理此种问题的方法和能力还很欠缺,问题3的测试结果就是一个例证。

当然,文字语言、图形语言和符号语言是一个不可分割的、统一的整体,它们能够互相渗透、互相印证、互相转化和互相补充,从文字语言到符号(图形)语言的转译可使具体、复杂的问题形象化、简单化;从符号语言到图形(文字)语言的转译能使简洁、抽象的问题具体化、直观化;从图形语言到文字(符号)语言的转译能使直观的、模糊的问题符号化、精确化^[8]。数学教学过程中,要多让学生对同一个数学问题用多种数学语言进行表达,使他们能够从多角度、多方位去发现和提出问题、分析和解决问题。这样经常性的数学语言“互译”,一定能使学生的数学语言转译能力得到提高,从而实现培养学生数学核心素养的目标。

(上接第28页)

笔者曾经一度轻概念的复习,引导学生将概念一过,随即就进入刷题讲题循环模式,期待在刷题中学会刷题,结果是笔者忙碌于各种题型的总结,疲惫于各种试卷中难题的讲解,错过了给予学生对概念,尤其是核心概念在一轮复习中深层次再理解和融会贯通的机会,致使学生在考试中遇到所谓新题一筹莫展、束手无策。实践证明:高三数学复习中,应立足单元整体,在每一个章节复习起始课上,教师加强学习方法指导,帮助学生养成良好的数学学习习惯,敢于质疑、善于思考,理解概念、把握本质,数形结合、明晰算理,厘清知识的来龙去脉,建立知识之间的关联^[2]。这不仅不会影响复习的进度,还会更有效地帮助学生夯实数学基础知识,拓展基本技能,深化基本思想,积累基本活动经验,有利于促进学生通过发现事物内部以及事物之间的关系和规律将知道的一系列的数学事实构建成知识体系和模型,并向更完备的方向发展,形成解题思维的固着点,让逻辑推理的数学素养落地生根,事半功倍。

本节课,笔者看似一道例题没有讲、学生一道练习没有做,实则师生交流间至少完成了8道题:余弦定理、射影定理和正弦定理的证明,余弦定理的三个式子中的两个证明第三个,正弦定理与余弦定理等价性证明,以及用正弦定理证明三角形的角平分线定理,用余弦定理推导三角形的中线长公式。笔者抓住一轮复习的契机,通过余弦定理、正弦定理和射影

参考文献

- [1] 斯托利亚尔. 数学教育学[M]. 丁尔陞,王慧芬,锤善基,等,译. 北京:人民教育出版社,1984:71.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018:8.
- [3] 范叙保,汤炳兴,田中. 数学能力成分的性别差异测试分析[J]. 数学教育学报,1999(4):70-73,81.
- [4] 朱永厂. 高中生数学语言转化能力的现状及对策[J]. 数学通报,2004(6):24-26.
- [5] 钟进均. 基于语言学视角的“说数学”探究[J]. 数学通报,2013,52(3):11-14,17.
- [6] 朱永厂. 让思维在探究中升华——以2018年江苏高考第13题为例[J]. 中学数学月刊,2018(11):49-51.
- [7] 朱永厂. 让探究成为一种习惯——以一道向量高考试题为例[J]. 中学数学月刊,2020(5):16-18.
- [8] 陈振,陈玉凤. 高中生数学建模意识问卷调查[J]. 中学数学月刊,2020(5):34-36.

定理的证明建立知识之间的深层联系,并基于联系,猜想并证明正弦定理和余弦定理的等价性,发展学生的逻辑推理素养。囿于学生的接受能力,笔者没有点明余弦定理和射影定理是等价的,而余弦定理是正弦定理的充分不必要条件,它们的等价是需要正弦定理加上三角形内角和定理的。这三者的等价性的本质因素是满足定理条件的六个元素是否构成一个三角形。在重温这些经典定理的证明以及定理的应用过程中,引导学生借助向量的运算,探索三角形边长与角度的关系,反复咀嚼算两次的思想,学习应用波利亚怎样解题的解题步骤解决难题,从而落实对学生分析问题和解决问题能力以及意志品质和关键能力的培养,进而实现“人人都能获得良好的数学教育,不同的人在数学上得到不同的发展”^{[3]9}。

参考文献

- [1] 教育部考试中心. 高考试题分析(理科数学分册)2020年版[M]. 北京:高等教育出版社,2020:35.
- [2] 梅磊. 考在余弦定理 意在正面引导——有感于2011年高考数学陕西卷第18题的导向功能[J]. 中学数学教学,2012(4):49-50.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017版2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [4] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京:人民教育出版社,2019:30.