数学概念教学中学生学习方法的指导

陈学军　（江苏省苏州市高新区第一中学　215011）

《普通高中数学课程标准(实验)》指出：丰富学生的学习方式，改进学生的学习方法，使学生学会学习，为终身学习和终身发展打下良好的基础，是高中数学课程追求的基本理念. 学法指导是发挥学生内因作用的有力措施. 学生学习能力形成的发展规律大致是：由模仿性学习到独立性学习再到创造性学习；由被动学习到主动学习再到积极探索. 即掌握了学习的方法，形成了学习的能力，养成了学习的习惯. 学习能力的形成和发展正是教师调动学生的学习积极性，在规律和方法方面予以指导，在理念和意志方面予以磨炼的结果.

概念学习是数学学习的重要内容，其学习过程蕴含着丰富的发现问题、研究问题和解决问题的方法，如在函数学习中通过幂函数这一概念的学习，使学生了解研究函数可按照“定义(表达式、定义域、值域) → 图象 → 性质 → 应用”的主线来展开. 研究函数的性质主要是研究有界性(范围)、单调性、奇偶性等. 学生可以模仿以上的研究线索，类似地探究指数、对数函数乃至以后的三角函数的有关知识. 学生概念形成的过程实质上可概括为三个阶段：感知呈现材料；分析概括定义；剖析理解概念.

1　感知呈现材料 —— 观察、比较、分类、寻找

通过课本呈现的材料和事例、学过的数学知识、日常生活经验知识、经典数学问题、数学实验等归纳的素材，在观察的基础上，采用比较、分类、寻找的方法在知觉水平上进行分析、辨认，根据事物的外部特征感觉、体验数学.

案例 1　直线和平面垂直的概念(苏教版必修 2 第 33 页).

问题 1　在“线面平行”的位置关系中，我们将“线面平行”转化为“线线平行”来研究，体现了降维思想. 那么“线面垂直”可转化成哪些要素之间的关系来研究呢？

生：“线面垂直”可转化为直线与平面内的直线的位置关系来研究.

教师请学生拿出纸和笔画出“直线和平面相交”的图形，再从学生所画图形中选择了两个不同的投影至大屏幕上.

问题 2　你认为图 1、图 2 有什么不一样？

生：图 1 中直线是“斜的”，和平面不垂直；图 2 中直线和平面垂直.

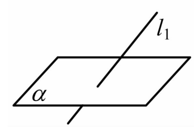

图 1

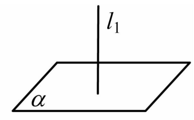

图 2

问题 3　你怎么知道图 2 中直线与平面垂直？

生 1：感觉它们是垂直的.

生 2：感觉不斜.

师：对，图 2 给大家的感觉就是“不歪不斜”.

这时学生已从比较中区分出两类不同特征的图形，但对直线和平面垂直也还停留在直觉感知的阶段，教师可继续引导学生观察：竖起放在课桌上的课本(图 3)，思考：

问题 4　为使书脊与平面 α 垂直，书脊所在直线 AB 与各书页和桌面交线应该有怎样的关系？

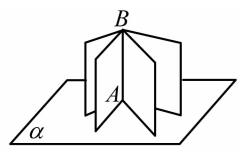

图 3

通过问题 4，引导学生寻找直线与平面垂直的本质特征.

在概念学习的感知呈现材料阶段就是要引导学生在探究的过程中体验观察、比较、分类、寻找的学习方法.

2　分析、概括定义 —— 抽象、概括

通过对背景材料的比较、分析，抽取出数学事实或现象的本质特征，初步形成概念，并以准确的语言明确揭示概念的本质，指出新概念所隶属的更一般的类别，给出新概念的定义特征.

如在案例 1 中继续请学生思考：

问题 5　为了使书脊与平面 α 垂直，书脊所在直线与桌面上任意一条不过点 A 的直线有怎样的位置关系？为什么？

接着再回到一般情形，观察图 2 思考：

问题 6　如何用数学语言描述刚才说的 l“不歪不斜”？

问题 4、5 指出书脊所在直线 AB 和平面上任意一条直线的垂直关系，将学生引入概念的实质，而问题 6 则又将书本竖放在讲台上这一实例，推广、抽象到一般情形. 在问题 4、5 的基础上，从“不歪不斜”抽

取线面垂直的本质属性.这样,通过具体到抽象、特殊到一般的抽象、概括,直线与平面垂直的定义的形成已是水到渠成了.

数形结合是抽象、概括的另一个重要的途径.高中数学中有几何背景的概念、定理与性质比比皆是.由图形直观,经观察发现几何现象,是否具有一般性?如何从数量关系上来刻画、描述这些几何现象?这一过程就是抽象概括的思维活动.数学学习中借助数形结合不仅有利于学生从不同侧面来加深对数学知识的理解,还能提高学生解决实际问题的能力.不论是用数的抽象性质来证明形象的事实,还是用图形的直观来说明数式抽象的含义,它们的结合都是极富数学特征的语言转换,有利于学生对数学知识形成正确完整的表征.

案例 2 偶函数的定义(苏教版必修 1 第 41 页).

问题 1 观察函数 $y=x^2$ 的图象,它有什么变化规律?

问题 2 “关于 y 轴对称”的含义是什么?

问题 3 如何用数量描述两点关于 y 轴的“对称”性?

问题 4 如何用数量来刻划函数 $y=x^2$ 的图象关于 y 轴的“对称”性?

问题 5 你能否给偶函数下一个定义?

通过以上的设问,结合图形帮助学生抽象出偶函数的概念.

类比迁移是概括的又一个重要手法.类比迁移比较适用于两个并列概念的学习.在类比过程中学生完全可以通过自己的思维活动完成主动建构对相应并列概念的理解.如“圆锥曲线的方程”中,椭圆、双曲线、抛物线三部分的内容安排相似,都是按“曲线 → 方程 → 几何性质”的逻辑顺序展开的.这就意味着,只要指导学生掌握了学习椭圆的方法,体会到求曲线方程和讨论曲线性质的一般过程,就能基本独立地完成双曲线、抛物线的部分内容的学习.高中教材中指数与对数、指数函数与对数函数、线线角与线面角、等差数列与等比数列、正弦函数与余弦函数等概念都可以看作有特殊关系的并列概念.利用类比策略教学时,学生扎实掌握被类比概念的含义、性质是前提和关键,同时在类比概括中又可以反过来加深对被类比概念的理解.

3 剖析理解概念 —— 辨析、构建

剖析理解概念的任务是概念辨析,发展完善概念的内涵和外延,并构建概念结构支架.

3.1 概念辨析

引导学生从多角度、多方位、多层次地探索概念变式,透过现象看本质,并从中体会到概念辨析过程中的常用方法,以便运用到其他概念的学习,促进学习迁移.

(1) 多元表征.数学概念往往有多种表征方式,这些不同的表征将导致不同的思维方向,可以促进学生多角度理解概念.

案例 3 直线与平面垂直的概念,就可以从 4 个角度进行表征.

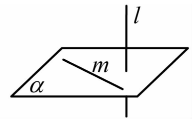

图 4

① 实物:旗杆、长方体的侧棱与底面等;

② 图形(图 4);

③ 文字语言:如果一条直线与一平面内的任意一条直线都垂直,叫做直线与平面垂直;

④ 符号语言:$\left.\begin{array}{l} l\perp m, \\ m\subset\alpha, m \text{ 是任意的} \end{array}\right\} \Rightarrow l\perp\alpha$.

概念学习中让学生理解不同表征间的联系,并学会选择与转化,就能有效地运用概念进行逻辑判断与推理.

(2) 有效记忆.在理解的基础上记忆概念是思维活动的起点.学习过程中应结合所学内容介绍一些有效的记忆方法.对一些并列的概念如等比数列、等差数列,椭圆、双曲线、抛物线等采用类比记忆;幂函数、指数函数、对数函数性质可采用形象记忆;三角函数的诱导公式采用整体记忆.对于纷繁复杂的数学知识,我们可以根据知识之间的联系,采用系统的记忆方法使之组成一个便于记忆的知识网络.

案例 4 平行六面体、直四棱柱、直平行六面体、长方体、正四棱柱、正方体的概念(苏教版必修 2 第 5 页).这一组概念之间联系比较紧密,学生常常容易混淆,教学中可以通过网络图来系统记忆(图 5).

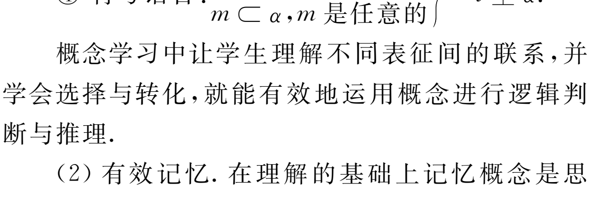

图 5

(3) 特殊形态和非标准形态.特殊形态是从概念的一般性出发,探讨概念的特殊情形.非标准形态是从概念的局部来解释概念的本质特征.

案例 5 等比数列的概念(苏教版必修 5 第 45 页).

① a,A,b 成等比数列 $\Leftrightarrow \dfrac{A}{a}=\dfrac{b}{A}\Leftrightarrow A^2=ab\Leftrightarrow A=\pm\sqrt{ab}$,称 A 为 a,b 的等比中项;② 等比数列 $\{a_n\}$

中，奇数项组成的数列 $a_1, a_3, a_5, \cdots$ 成等比数列，公比为 q^2；偶数项组成的数列 $a_2, a_4, a_6, \cdots$ 成等比数列，公比为 q^2；每隔相同的项组成的数列 $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, \cdots (m, k \in \mathbf{N}^*)$ 也成等比数列，其公比为 q^k.

所谓“非标准形态”指的是那些不常见的或看起来不那么“顺眼”的表达式. 概念的“非标准形态”有时更能揭示其本质特征.

案例 6　直线和平面所成的角(苏教版必修 2 第 36 页).

在直线和平面所成的角的定义形成后，可以引导学生在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中寻找直线 C_1A 分别和平面 $A_1B_1C_1$，A_1ABB_1 和 C_1CBB_1 所成的角(图 6).

(4) 正例、反例. 很多数学概念(如函数的单调性、奇偶性的定义，正棱锥的定义等)都是采用正面阐述的，若对其本质属性含糊不清，则会引起混淆. 教学中的正例和反例有利于“丰富”概念和“纯洁”概念.

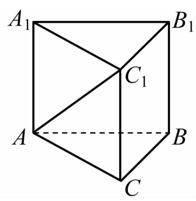

图 6

案例 7　异面直线的概念的辨析设计(苏教版必修 2 第 24 页).

变式 1　空间两条不相交的直线是异面直线；

变式 2　两条不平行的直线是异面直线；

变式 3　分别在两个平面内的两条直线是异面直线；

变式 4　平面内一条直线和平面外的一条直线是异面直线；

变式 5　不同在一个平面内的两直线是异面直线.

这种辨析容易使学生从正、反两方面明确异面直线的本质，有效防止误解.

3.2　建构支架

新知识的学习是以已有知识经验为基础的一个主动的意义建构过程. 学生头脑中所拥有的概念的心理表征是相互联系的，具有一定结构关系. 理解一个数学概念就是指新概念的心理表征已经成为主体已有的概念网络的一个组成部分，即与已有的认知结构建立了联系；这种联系既有逻辑的，也有认知的. 指导学生建构支架，就是建立稳定、灵活、丰富的联系，实现概念转变学习.

(1) 逆向问题. 从逆向思维的角度来理解概念，固化认知结构.

案例 8　在等差数列概念学习后思考(苏教版必修 5 第 33 页)：

① 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ n - 3, & n \geqslant 2, n \in \mathbf{N} \end{cases}$ 是不是等差数列？

② 已知等差数列的通项公式，求公差.

(2) 异化问题. 由于新概念的学习是一个和其他知识进行比较和鉴别的过程，设计一些具有异化形态的相近问题，可以引导学生在差异鉴别和转化的认识过程中丰富认知结构. 在案例 8 中继续思考：

③ 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 0$，$\dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_{n-1} - 1} = 1$，求其通项公式.

(3) 联系性问题. 概念学习时，及时将前面所学知识充实进来，可以打通知识之间的联系，编织网络化的认知结构.

案例 9　等差数列的通项公式，可以看作是正整数 n 的关于一次函数；学习到前 n 项和时，及时总结 $S_n = An^2 + Bn \Leftrightarrow \{a_n\}$ 成等差数列，S_n 也是关于 n 的二次函数. 在研究了等比数列的定义后，引导学生研究：若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{c^{a_n}\}(c > 0$ 且 $c \neq 1)$ 是等比数列；若 $\{b_n\}$ 是正项等比数列，则 $\{\lg b_n\}$ 是等差数列. 这种联系实现了等差数列和等比数列的转化.

许多数学概念之间彼此联系密切，须在概念体系之中把握. 在某一类概念教学到一定阶段时应引导学生进行归纳总结，以概念间的关系(如从属、合成、对偶等)为基础构建相关概念网络，如案例 4 就是关于“四棱柱”的从属关系概念链. 再如：

案例 10　借助合成关系构成“角”的概念链(苏教版必修 2).

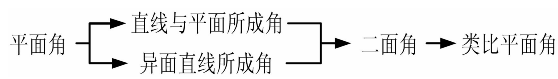

图 7

根据图 7 中的关系，不仅可以认识到空间角是在平面角的基础上发展和推广得来的，反过来又都可以转化到平面中去研究，而且还可以使学生体会“转化与化归”的数学思想在良好认知结构中的统领作用.

(4) 认知结构逐步优化.

首先是对大容量知识进行整合和提炼. 在认知结构中层次过多，而每一层的适用条件又过于复杂，学生在掌握和选择时困难就大. 这时我们可指导学生用“思想”为“方法”打包，既浓缩容量，又不失操作性. 如指、对数函数的性质很多，尤其涉及到既有指数又有对数，底又不同的几个数大小比较时，学生难以判断. 其实我们只要掌握 $y = 2^x$ 和 $y = 10^x$ 的函数图象，就可以利用数形结合的思想由对称画出 $y =$

彰显习题精彩　演绎教材魅力

——谈如何提高数学作业讲评的有效性

王渭宁　（甘肃省泾川一中　744300）

教材中的习题往往蕴含着极其丰富的内涵，不仅能帮助学生理解巩固所学知识，而且对学生形成良好的数学素养、发展智能起着积极作用. 要让学生走出“题海”，必须立足教材，挖掘课本习题功能. 以下是笔者结合自己的教学实际，在作业讲评中有效利用课本习题，培养学生思维能力的几个实例.

1　凸显错误，正本清源

作业中出现的错误是学生思维过程的真实再现，包含有许多合理因素. 教师应善于利用错误资源，引导学生认识错误的根源，自己发现出错的原因，达到以“误”导“悟”.

例 1　甲、乙两地相距 s km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不超过 c km/h. 已知汽车每小时的运输成本（以元为单位）由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v（单位：km/h）的平方成正比，且比例系数为 b；固定部分 a 元（$a\leqslant bc^2$）. 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大的速度行驶？（人教 A 版教材必修 5 第 103 页复习参考题 A 组题 8）

错解　设全程运输成本为 y 元，则由题意得 $y=(bv^2+a)\cdot\frac{s}{v}=bvs+\frac{as}{v}\geqslant 2\sqrt{bvs\cdot\frac{as}{v}}=2s\sqrt{ab}$（当且仅当 $bvs=\frac{as}{v}$ 即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时取“$=$”号）. 故当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，$y_{\min}=2s\sqrt{ab}$.

这是大多数学生的解法，结果是正确的，但其实解答过程是有问题的. 从表面上看忽视了条件“$a\leqslant bc^2$”，但真正的错因是没有说明是否 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}\in(0,c]$，即利用基本不等式求最值时没有考虑

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$，$y=\log_2 x$，$y=\lg x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$，$y=\log_{\frac{1}{10}}x$ 的图象；再类比推广到底 $a>1$ 和 $0<a<1$ 的情形，便能顺利结合图象和特殊值进行比较.

其次是用程序知识来引领. 教学中一要注意提取一些操作层面的程序知识，如求二次函数的最值三步曲：一配方，二分类讨论，三画图. 二是及时归纳解题方向层面的程序知识，而这一知识更具有概括性，适用范围更广. 如代数问题常常是由代数式而引发联想的.

按图 8 的程序来检索就能较快地联系相关概念找到合理的解题方向.

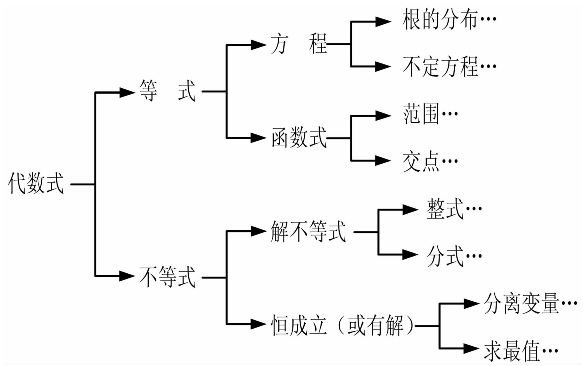

图 8

再次就是要及时进行结构重组，对于每个版块的知识除了将旧的及时补进来，新的及时放进去，还应注意消除前概念的负面影响，不断修正和重组.

案例 11　设四个实数成等比数列，其积为 81，中间两项的和为 10，求其公比.

错解　设四个数分别为 $\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq，aq^3，由 $\begin{cases}a^4=81,\\ \frac{a}{q}+aq=10\end{cases}\Rightarrow 9q^4-82q^2+9=0$，解得 $q^2=9$ 或 $q^2=\frac{1}{9}$.

分析　受前概念等差数列当中四个数可分别假设为 $a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$ 的影响，在等比数列当中，也作了类似的假设 $\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq，aq^3. 此时这四个数的公比为 q^2，从而就限定了求出的公比必为正数. 事实上，本题的公比也可以是负数.

一个数学新知识的建立，必有与之对应的科学方法产生. 在概念教学的各个环节有意识有步骤地引导学生体会并逐步领悟其蕴含的科学方法，既能起到建构知识、方法体系，产生有意义学习的作用，也能达到培养学生学习能力的目的.