

利用 GeoGebra 探究圆锥截线

徐敏霞 (苏州大学数学科学学院 215006)

季阳天 (江苏省昆山市秀峰中学 215300)

圆锥曲线是高中解析几何的重要内容,也是教学的重难点.在学习“一个平面截圆锥面所得曲线”时,学生对截得的几类圆锥曲线可能心存疑惑.部分原因在于教师只能依靠静态图形对学生讲解,在视觉直观上满足不了学生的要求.本文尝试借助 GeoGebra(下称 GGB)软件实现这一内容由静态向动态教学的转变.

GGB 是一款结合了几何、代数和数据处理的免费数学软件,目前已在世界各地广泛使用.GGB 具有三维作图功能,教师通过简单的操作就能清楚地展示平面截圆锥面的过程.

1 圆锥截线

问题 1 当一个平面截一个圆锥面时,会截得哪些曲线?

分析 这是苏教版高中数学选修 2-1 第 2.1 节圆锥曲线的引入问题,是从整体上对三种圆锥曲线定义的把握.学生容易对截得的情况考虑不全,使用 GGB 给学生演示这一过程,能起到传统教学达不到的效果.

操作要点 首先在 GGB 的视图工具栏中打开 3D 绘图区,如图 1(也可隐藏坐标轴).

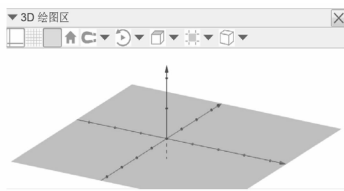


图 1

(1) 为了自由控制平面截圆锥面,先创设滑动条 m 和 n ,分别用来控制平面沿着 x 轴和 z 轴方向移动.

(2) 以原点为中心(顶点)、 z 轴为轴线、半顶角为 30° 的圆锥面 a 为例.为方便观察平面与圆锥面的相交情况,作出圆锥面的轴线 d (在输入命令开头时,系统自带补全功能,无需记忆,GGB 支持中文命令).

(3) 下面比较困难的是作出动平面 b ,先定义点 $D(m, 0, n)$,过点 D 作平行于 y 轴的直线 e ,输入“直线[D, y 轴]”;再定义点 $E(m, 0, 0)$,作以直线 e 为轴且经过 E 的圆,输入命令“圆形[e, E]”,这个圆是为了给平面创设一个旋转的轨迹.

(4) 为平面设置旋转角,建立滑动条 α ,在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 变化(可在右击属性中修改),用来控制截面与圆锥面轴之间的夹角.然后作由点 E 绕直线 e 旋转 $-\alpha$ 的点 E' ,输入命令“旋转[$E, -\alpha, e$]”.

(5) 这样就由点 E' 和直线 e 确定动平面 b 了,平面 b 可沿 E 到 E' 张成的弧转动(从(3)开始的点和线都是为了确定可控的截面 b ,这是作图的难点).

(6) 最后利用“相交曲线”命令显示出圆锥和截面 b 相交的圆锥曲线 c .

这样得到的平面可自由控制其沿 x 轴和 z 轴的平移,通过滑动条 α 还能控制截面与圆锥面轴的角度,将探究问题的模型生动地呈现在学生面前.通过动态演示观察和探究,帮助学生经历从具体情境中抽象出圆锥曲线的过程,有助于学生了解三种圆锥曲线的实际背景.



图 2

当 $\alpha = 0^\circ$ 时,截线为两条相交直线;当 $\alpha = 90^\circ$ 时,截线为圆;当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时,截得三种圆锥曲线(图 2).若设圆锥母线与轴的夹角为角 β (上例中为 30°),则可引导学生更一般地得到“一个平面截圆锥面”的所有情况:当 $\alpha = 0$ 时,截得两条相交直线;当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,截得圆;当 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时,截得曲线为椭圆;当 $\beta = \alpha$ 时,截得曲线为抛物线;当 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 时,截得曲线为双曲线.

评析 GGB 的恰当介入符合本节内容的教学要求,符合学生的认知发展,从直观上帮助学生从具体情境中抽象得出三种圆锥曲线,有助于加深学生对圆锥曲线的理解.同时,通过平面动态截圆锥面的过程,也让学生感受到了所截得不同圆锥曲线的原因所在.GGB 简洁方便的操作作为丰富

数学课堂教学提供了更多的可能性(对于他人的作图步骤,GGB可以在视图—作图过程中查看,方便互相借鉴学习).

2 变式探究

问题 2 将一个半径为 R 的篮球放在地面上,被阳光斜照留下的影子是椭圆,如果将光源换成点光源,那么影子可能是抛物线吗?

分析 本探究题来自苏教版选修 2-1 第 2.1 节课后习题 5. 平行光线和点光源下影子是椭圆的情况学生根据生活经验也许可以想象得出,但点光源的照射有没有可能形成影子是抛物线的情况呢? 这就需要利用信息技术进行模拟实验.

操作要点 (1) 建立平面 α (地面), 创设自由点 B (点光源), 作以原点 A 为球心、1 为半径的球 b (假设题中球半径为 1).

(2) 由于点光源的光线是呈球面状向外扩散的, 所以先作出它与球 b 的相交曲线, 得到圆 c (输入命令“相交曲线[球面[B, sqrt(距离[A, B]² - 1)], b]”).

(3) 作点光源呈圆锥状照射在球面上的光线, 需要度量圆锥半顶角的正切值 d , 输入命令“atan(半径[c] / 距离[B, 中心[c]])”.

(4) 这样就可以得到以 B 为顶点、 AB 为轴、 d 为半顶角的圆锥面 e ; 最后利用“相交曲线”命令得到平面 α 与圆锥面 e 的相交曲线 f (图 3).

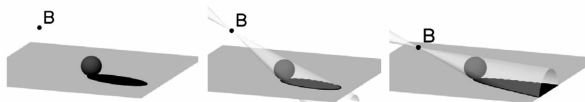


图 3

图 4

图 5

图 3 真实地再现了点光源照射下球的影子, 这种影子情况也是生活中容易观察到的. 通过在代数区对曲线 f 的方程的验证, 发现这时形成的影子确实是椭圆. 接着教师将点光源 B 上下移动, 让学生直观地感受到当点 B 在靠近地面的时候有形成抛物线的可能. 教师可以把圆锥面 e 显示出来, 辅助学生思考(图 4).

教师可以提示学生联系平面截圆锥面的情况(忽视小球的存在), 由上述探究我们已经知道当 $\beta = \alpha$ 时, 截得曲线为抛物线. 这里截得的曲线相当于地面的影子, 若要使影子变成抛物线, 那应该也要满足 $\beta = \alpha$ 的条件(即地面与圆锥面轴的夹角等于圆锥面与轴的夹角), 这里稍有不同的是可自由移动的是点光源 B . 这样学生就不难得出, 当地面与圆锥面的一条母线平行的时候, 即点 B 到地面的距离等于小球直径时, 影子是抛物线. 接着教师

通过在代数区将点 B 的 z 坐标改成 1(在代数区对曲线 f 再验证确实是抛物线), 得到影子是抛物线的情况(图 5).

教师还可以引导学生探究, 什么时候形成的影子是双曲线的一支呢?(当点 B 到地面距离小于小球直径时).

评析 通过 GGB 的模拟, 可以帮助学生从实际问题中抽象出数学模型, 并将问题化归为平面截圆锥面的问题. 让学生体会到数学美的同时, 也有助于发展学生理论联系实际的问题意识, 激发学习的兴趣.

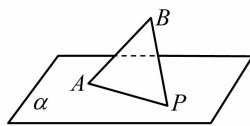


图 6

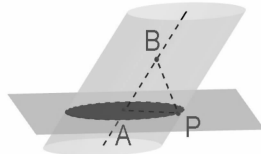


图 7

问题 3 (2008 年高考浙江卷理科第 10 题) 如图 6, AB 是平面 α 的斜线段, A 为斜足, 若点 P 在平面 α 内运动, 使得 $\triangle ABP$ 的面积为定值, 则动点 P 的轨迹是().

- (A) 圆 (B) 椭圆
(C) 一条直线 (D) 两条平行直线

分析 这是一道立体几何结合解析几何的综合题, 一般都采取解轨迹方程的方法, 若能在讲解中运用 GGB 辅助展示, 就很直观明了.

操作要点 (1) 在 xOy 平面内取 A, P 两点, 在平面外取点 B , 作经过点 A 和 B 的直线 c , 接着度量点 P 到直线 c 的距离 d .

(2) 作出以直线 c 为轴, 以距离 d 为半径的圆柱, 最后利用“相交曲线”命令得到相交曲线 h , 为椭圆(图 7).

评析 通过 GGB 的空间化, 将问题转化为平面斜截圆柱的问题. 运用技术展示是对想象或解析法的补充, 可开阔学生的解题思路和视野, 对处理立体几何与解析几何整合的问题大有裨益.

3 结语

信息技术的发展和更新不断推动着教学方式的变革, 有助于促进教学朝着更好的方向发展, 教师有义务和责任把经过信息技术优化的课堂带给学生, 这也是课程标准所提出的要求. 上述 GGB 的 3D 功能仅是冰山一角, 教师若能在这类问题的探究教学中恰当运用 GGB, 无论是对教师的教, 还是学生的学都将达到事半功倍的效果. 希望本文能抛砖引玉, 让 GGB 更好地服务于数学教学.